Digitale Bibliothek Braunschweig

Spannungsfunktionen und Verträglichkeitsbedingungen der Kontinuumsmechanik

Günther, Wilhelm

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 6, 1954, S. 207-219

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00046615

Digitale Bibliothek Braunschweig

Spannungsfunktionen und Verträglichkeitsbedingungen der Kontinuumsmechanik

Von **Wilhelm Günther**

Mit 3 Abbildungen

Vorgelegt von Herrn **H. Schaefer**

Summary: In this paper an introduction is given into the theory of "Stress-Functions", first considered by C. Maxwell. The geometrical aspect of this functions leads to remarkable relations between the classical theory of Stress-Fields and the general Theory of Relativity. On the other hand, in the Lagrangian view of mechanics, the Stress-Functions form the "Reaction-Tensor" produced by condition, that Euclidean geometry is unchanged by any deformation of a continuous medium. Thus, the theory of Stress-Functions joins two heterogeneous parts of Mathematical Physics.

Übersicht: Die Arbeit enthält eine Einführung in die Theorie der „Spannungsfunktionen", wie sie für den räumlichen Spannungszustand zuerst von C. Maxwell untersucht worden sind. Die geometrische Deutung dieser Funktionen läßt bemerkenswerte Beziehungen zwischen der klassischen Theorie der Spannungsfelder und der Allgemeinen Relativitätstheorie erkennen. Andererseits erscheint, im Rahmen der Lagrangeschen Mechanik, der Tensor der Spannungsfunktionen als System von Reaktionen auf die Bedingung, daß bei einer Deformation des Kontinuums die Euklidische Geometrie erhalten bleibt. Die Verbindung der Allgemeinen Relativitätstheorie mit der klassischen Mechanik läuft also über die Theorie der Spannungsfunktionen.

1. Synthetischer Aufbau des Tensors der Spannungsfunktionen

Ein einfach zusammenhängender starrer Körper (Abb. 1) befinde sich unter dem Einfluß stetig verteilter Oberflächenkräfte im Gleichgewicht. Neben den cartesischen Koordinaten x, y, z benutzen wir allgemeine Koordinaten $x^{(i)}$, für welche die Funktionaldeterminate der Koordinatentransformation höchstens in Ausnahmepunkten verschwindet; solche Punkte bleiben gegebenenfalls von unseren Betrachtungen ausgeschlossen.

Zunächst wiederholen wir bekannte Dinge: Man setzt die Oberflächenkräfte $d\boldsymbol{K}$ als lineare Vektorfunktionen des Normalenvektors $\boldsymbol{n}$ der Oberfläche an:

$$d\,K^i = S^{i\alpha}\,n_\alpha\,d\,f\text{*)} \qquad (1,1)$$

$$S^{i\alpha}\,n_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} S^{i\alpha}\,n_\alpha \qquad (i = 1, 2, 3)\,.$$

und formuliert mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen die Gleichgewichtsbedingungen

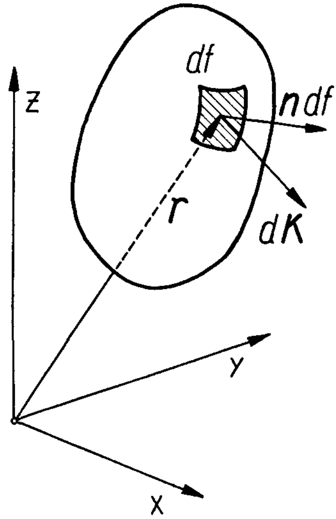

Abb. 1

*) Über griechische Indizes wird summiert, falls sie in einer Formelgruppe zweimal auftreten:

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00046615

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$\iint\limits_{(f)} d\,K^\lambda\,\delta\,v_\lambda = \iint\limits_{(f)} S^{\lambda\alpha}\,\delta\,v_\lambda\,n_\alpha\,d\,f = 0; \tag{1,2}$$

$\delta\,\boldsymbol{v}$ ist ein „virtuelles Verschiebungsfeld" — mit der Starrheit des Körpers verträglich, aber sonst beliebig. Der Gaußische Integralsatz liefert dann:

$$\iiint\limits_{(V)} \nabla_\alpha\,(S^{\lambda\alpha}\,\delta\,v_\lambda)\,d\,V = 0; \tag{1,3}$$

∇_α ist das Symbol der kovarianten Differentiation. (1, 3) zerfällt in

$$\iiint\limits_{(V)} \nabla_\alpha S^{\lambda\alpha}\,\delta\,v_\lambda\,d\,V = 0, \quad \iiint\limits_{(V)} S^{\lambda\alpha}\,\nabla_\alpha\,(\delta\,v_\lambda)\,d\,V = 0. \tag{1,4a, b}$$

Aus (1,4a) folgt in bekannter Weise für den „Spannungstensor" $\boldsymbol{S}$:

$$\nabla_\alpha\,S^{i\alpha} = 0; \tag{1,5}$$

im Inneren des Bereichs verschwindet die vektorielle Divergenz des Spannungstensors. Wegen der Starrheitsbedingung gilt das virtuelle Verschiebungsfeld die Killingsche Gleichung

$$\nabla_\alpha\,(\delta\,v_\lambda) = \nabla_{[\alpha}\,(\delta\,v_{\lambda]}) = \tfrac{1}{2}\,[\nabla_\alpha\,(\delta\,v_\lambda) - \nabla_\lambda\,(\delta\,v_\alpha)], \tag{1,6}$$

so daß (1,4b) die Symmetrie des Spannungstensors gibt:

$$S^{[ik]} = 0 \quad \text{bzw.} \quad S^{ik} = S^{(ik)} = \frac{1}{2}\,[S^{ik} + S^{ki}]. \tag{1,7}$$

(1,1), (1,5) und 1,6) lassen sich zusammenfassen in dem bekannten Ansatz der Kontinuumsmechanik:

$$\iiint\limits_{(V)} S^{\lambda\alpha}\,\delta\,\varepsilon_{\lambda\alpha}\,d\,V - \iint\limits_{(f)} d\,K^\lambda\,\delta\,v_\lambda = 0; \tag{1,8}$$

darin ist

$$\delta\,\varepsilon_{\lambda\alpha} = \delta\,\varepsilon_{(\lambda\alpha)} = \frac{1}{2}\,[\nabla_\lambda\,(\delta\,v_\alpha) + \nabla_\alpha\,(\delta\,v_\lambda)] \tag{1,9}$$

der „virtuelle Verzerrungstensor". Die Symmetrie des Spannungstensors folgt dann unmittelbar aus der des Verzerrungstensors; die Divergenzbedingung (1,5) und die Beziehung (1,1) ergeben sich nach einmaliger partieller Integration des Volumintegrals in (1,8) unter Verwendung von (1,9). Die mechanische Deutung des Ansatzes (1,8) innerhalb der Lagrangeschen Mechanik hat Piola [1] gegeben: der Ansatz formuliert das Gleichgewicht der Oberflächenkräfte unter der Nebenbedingung, daß das virtuelle Verschiebungsfeld verzerrungsfrei ist, der Körper also starr bleibt. Im Spannungstensor werden die „Lagrangeschen Faktoren", d. h. die Reaktionen auf diese kinematische Zwangsbedingung zusammengefaßt. Um aus den Reaktionsspannungen des starren Körpers die eingeprägten Spannungen des unstarren (z. B. elastischen) Kontinuums zu gewinnen, bedarf es eines weiteren Prinzips, des „Befreiungsprinzips", nach dem bei einer Lockerung der kinematischen Bedingungen die Reaktionen zu eingeprägten (d. h. meßbaren) Kraftgrößen werden, die in erster Linie von denjenigen geometrischen Größen abhängen, deren Änderung vorher verboten war (Hamel [2]).

Der symmetrische Spannungstensor $\boldsymbol{S}$ läßt sich nun überführen in einen schiefsymmetrischen „transversalen Spannungstensor" vierter Stufe. Formal kann das mit Hilfe des „e-Tensors" geschehen, der ein ko- bzw. kontra-

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00046615

Digitale Bibliothek Braunschweig

variantes Maß für das orientierte Volumen der Koordinaten-Einheitsmasche ist. Dieser Tensor 3. Stufe ist in allen Indizes schiefsymmetrisch:

$$e^{ikl} = e^{[ikl]} = \frac{1}{3!}\left[e^{ikl} + e^{kli} + e^{lik} - e^{kil} - e^{ilk} - e^{lki}\right]; \tag{1,10}$$

bezeichnen wir die Determinante aus den Maßzahlen g_{ik} des Maßtensors mit g, so ist

$$e^{ikl} = s\,g\,n\,(i\,k\,l)\cdot\frac{1}{\sqrt{g}},\quad e_{ikl} = s\,g\,n\,(i\,k\,l)\cdot\sqrt{g}. \tag{1,11}$$

Die kovariante Ableitung von $\boldsymbol{e}$ ist Null — verständlicherweise, da das Einheitsvolumen, mit seinem eigenen kovarianten Maß gemessen, überall denselben Wert haben muß.

Um den transversalen Spannungstensor $\boldsymbol{T}$ anschaulich aufzubauen, führen wir statt der Vektoren $\boldsymbol{n}\cdot d\,f$ und $d\,\boldsymbol{K}$ orientierte Flächenelemente $d\,\bar{\boldsymbol{f}}$ und $d\,\bar{\boldsymbol{K}}$ ein (Abb. 2), die auf $\boldsymbol{n}$ bzw. $d\,\boldsymbol{K}$ senkrecht stehen und deren Umlaufsinn

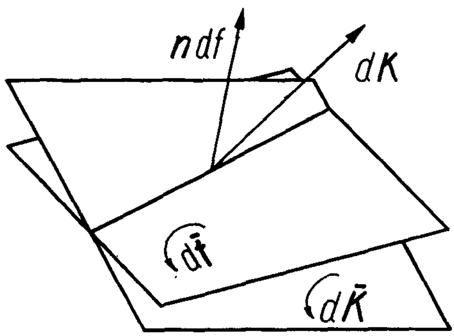

Abb. 2

und Inhalt Richtung und Größe dieser Vektoren mißt. $d\,\bar{\boldsymbol{f}}$ und $d\,\bar{\boldsymbol{K}}$ sind schiefsymmetrische Tensoren 2. Stufe:

$$\begin{aligned} d\,f^{ik} &= d\,f^{[ik]} = \frac{1}{2}\,e^{ik\alpha}\,n_\alpha\,d\,f, \\ d\,K_{lm} &= d\,K_{[lm]} = e_{lm\alpha}\,d\,K^\alpha; \end{aligned} \tag{1,12a}$$

die Umkehrungen von (1,12a) lauten:

$$\begin{aligned} n_i\,d\,f &= e_{i\alpha\beta}\,d\,f^{\alpha\beta}, \\ d\,K^i &= \frac{1}{2}\,e^{i\alpha\beta}\,d\,K_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{1,12b}$$

In ganz analoger Weise beschreiben wir schließlich das virtuelle Verschiebungsfeld durch einen schiefsymmetrischen Tensor $\delta\,\bar{\boldsymbol{v}}$:

$$\begin{aligned} \delta\,v^{ik} &= \frac{1}{2}\,e^{ik\alpha}\,\delta\,v_\alpha, \\ \delta\,v_i &= e_{i\alpha\beta}\,\delta\,v^{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{1,13}$$

Den linearen Zusammenhang zwischen $d\,\bar{\boldsymbol{K}}$ und $d\,\bar{\boldsymbol{f}}$ vermittelt der transversale Spannungstensor $\boldsymbol{T}$:

$$d\,K_{lm} = T_{\alpha\beta.\,lm}\,d\,f^{\alpha\beta}, \tag{1,14}$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00046615

Digitale Bibliothek Braunschweig

d. h. $\boldsymbol{T}$ dreht und verzerrt $d\bar{\boldsymbol{f}}$ so, daß $d\bar{\boldsymbol{K}}$ entsteht. Demnach haben wir als Ausdruck des Gleichgewichtes der Oberflächenkräfte:

$$\iint\limits_{(f)} T_{\alpha\beta,\varrho\sigma}\,\delta\, v^{\varrho\sigma}\, d\, f^{\alpha\beta} = 0\,. \tag{1,15}$$

Anwendung des Gaußischen Integralsatzes überführt (1,15) in

$$\iiint\limits_{(V)} \nabla_\lambda\,(T_{\alpha\beta,\varrho\sigma}\,\delta\, v^{\varrho\sigma})\, e^{\lambda\alpha\beta}\, d\, V = 0\,. \tag{1,16}$$

$\delta\,\bar{\boldsymbol{v}}$ ist das Feld einer starren Verschiebung, kann also in eine starre Translation und eine Drehung aufgespalten werden:

$$\delta\, v^{[ik]} = \delta\, \mathring{v}^{[ik]} + r^{[i}\,\delta\,\mathring{\omega}^{k]} \tag{1,17}$$

mit konstanten Größen $\delta\,\mathring{\bar{\boldsymbol{v}}}$ und $\delta\,\mathring{\boldsymbol{\omega}}$; $\boldsymbol{r}$ ist der körperfeste Vektor vom „Translationspunkt" zum betrachteten Oberflächenpunkt hin. Damit zerfällt (1,16) in die Bedingung für das Kräftegleichgewicht:

$$\iiint\limits_{(V)} \nabla_{[\lambda}\, T_{\alpha\beta]\,\varrho\sigma}\cdot\delta\, \mathring{v}^{\varrho\sigma}\, e^{\lambda\alpha\beta}\, d\, V = 0$$

oder

$$\boxed{\nabla_{[s}\, T_{ik]\,lm} = 0} \tag{1,18}$$

und für das Momentengleichgewicht:

$$\iiint\limits_{(V)} \nabla_{[\lambda}\,(T_{\alpha\beta]\,\varrho\sigma}\, r^\varrho)\,\delta\,\mathring{\omega}^\sigma\, e^{\lambda\alpha\beta}\, d\, V = 0$$

oder

$$\boxed{\nabla_{[s}\,(T_{ik]\,\lambda m}\, r^\lambda) = 0}\,. \tag{1,19a}$$

Nun ist

$$\nabla_s\, r^\lambda = \delta_s^\lambda = \begin{cases} 0 \text{ für } \lambda \neq s, \\ 1 \text{ für } \lambda = s; \end{cases} \tag{1,20}$$

daher ist (1,19a) gleichbedeutend mit

$$\boxed{T_{[ikl]\,m} = 0}\,. \tag{1,19b}$$

Nach Definition ist $\boldsymbol{T}$ im vorderen und im hinteren Indexpaar schiefsymmetrisch:

$$T_{ik,lm} = T_{[ik],[lm]} \tag{1,21}$$

genügt aber darüber hinaus einer „zyklischen Symmetrie" (1,19b) und einer „Bianchischen Identität" (1,18) — mit anderen Worten: $\boldsymbol{T}$ hat die Struktur eines Krümmungstensors. Wie beim Krümmungstensor (vgl. z. B. Levi-Cività [3]) folgt aus der schiefen Symmetrie (1,21) und der zyklischen Symmetrie (1,19b) die „gerade Symmetrie"

$$T_{ik,lm} = T_{lm,ik}\,. \tag{1,22}$$

Eine einfache Abzählung ergibt, daß $\boldsymbol{T}$ infolge seiner zahlreichen Symmetrien nur sechs algebraisch voneinander unabhängige Maßzahlen hat, also ebensoviele wie $\boldsymbol{S}$*).

---

*) In n Dimensionen hat der Krümmungstensor $\frac{n^2\,(n^2-1)}{12}$, der symmetrische Spannungstensor $\frac{n\,(n+1)}{2}$ algebraisch voneinander unabhängige Maßzahlen.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00046615

Digitale Bibliothek Braunschweig

Der Spannungszustand eines dreidimensionalen Kontinuums kann somit geometrisch gedeutet werden als der „Krümmungszustand" eines nichteuklidischen „Spannungsraumes", dessen Krümmungstensor $\boldsymbol{T}$ ist. Ein Ergebnis dieser Art war übrigens zu erwarten. Erstens ist (in der Auffassung der Allgemeinen Relativitätstheorie) der Spannungstensor ein Teil des Energie-Impulstensors und gibt daher Anlaß zu einer Raumverkrümmung, und zweitens sind auch beim ebenen Spannungszustand die Spannungen leicht in Beziehung zu setzen zu den Krümmungsverhältnissen der „Airyschen Spannungsfläche", vgl. hierzu den 2. Abschnitt.

Wir geben noch den Zusammenhang zwischen $\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{T}$ an, der sich aus (1,1), (1,12) und (1,14) entnehmen läßt:

$$S^{ik} = \frac{1}{4} e^{i\beta} e^{k\sigma\mu} T_{\alpha\beta,\lambda\mu}; \quad T_{ik,lm} = e_{ik\alpha} e_{lm\beta} S^{\alpha\beta}. \tag{1,23}$$

Man erkennt, daß der Symmetrie von $\boldsymbol{S}$ die zyklische Symmetrie von $\boldsymbol{T}$, der Divergenzbedingung für $\boldsymbol{S}$ die Bianchische Identität für $\boldsymbol{T}$ entspricht. Unser nächstes Ziel ist es nun, eine allgemeine Darstellung für $\boldsymbol{T}$ zu finden. Zu diesem Zweck fassen wir die Gleichgewichtsbedingungen (1,18) und (1,19a) als die Integrabilitätsbedingungen zweier Systeme von partiellen Differentialgleichungen auf. (1,18) ist nämlich die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\boldsymbol{T}$ die „Rotation" eines Tensors $\boldsymbol{X}$ ist:

$$T_{ik,lm} = \nabla_i (X_{k,lm} - X_{k,ml}) - \nabla_k (X_{i,lm} - X_{i,ml}), \tag{1,24}$$

wobei wir die schiefe Symmetrie in m und l ausdrücklich hervorgehoben haben. Entsprechend folgt aus (1,19a):

$$T_{ik,\lambda m} r^{\lambda} = \nabla_i Y_{km} - \nabla_k Y_{im}. \tag{1,25}$$

Faßt man (1,24) und (1,25) zusammen und berücksichtigt (1,21), so erhält man:

$$X_{k,im} - X_{k,mi} - X_{i,km} + X_{i,mk} = -\nabla_i F_{km} + \nabla_k F_{im} \tag{1,26}$$

mit

$$F_{km} = Y_{km} - r^{\lambda} (X_{k,\lambda m} - X_{k,m\lambda}).$$

Nun addiere man zu (1,26) die Gleichungen, die aus (1,26) durch Vertauschung von k bzw. i mit m entstehen. Dies führt auf

$$X_{m,ik} - X_{m,ki} = -\nabla_i F_{(km)} + \nabla_k F_{(im)} + \nabla_m F_{[ik]}, \tag{1,27}$$

so daß die gewünschte Darstellung von $\boldsymbol{T}$ mit

$$\boxed{T_{ik,lm} = \nabla_i \nabla_m F_{(kl)} + \nabla_k \nabla_l F_{(im)} - \nabla_i \nabla_l F_{(km)} - \nabla_k \nabla_m F_{(il)}} \tag{1,28}$$

gefunden ist. Diese Darstellung des Spannungsfeldes $\boldsymbol{T}$ durch einen symmetrischen „Spannungsfunktionentensor" $\boldsymbol{F}$ ist notwendig und hinreichend dafür, daß im Spannungsfeld Gleichgewicht herrscht.

Wir verschieben die weitere Untersuchung von (1,28) auf den nächsten Abschnitt und beschäftigen uns zunächst mit dem Aufbau des symmetrischen Spannungstensors $\boldsymbol{S}$ aus dem Spannungsfunktionensensor $\boldsymbol{F}$: Mit einer leichten Abänderung der Indexbezeichnungen folgt aus (1,23) und (1,28):

$$\begin{aligned} S^{ik} &= \frac{1}{4} e^{i\alpha\lambda} e^{k\beta\mu} T_{\alpha\lambda,\beta\mu} = e^{i\alpha\lambda} e^{k\beta\mu} \nabla_\alpha \nabla_\beta F_{(\lambda\mu)} = \\ &= \nabla_\alpha \nabla_\beta (e^{i\alpha\lambda} e^{k\beta\mu} F_{(\lambda\mu)}) = \nabla_\alpha \nabla_\beta U^{i\alpha,k\beta} \end{aligned} \tag{1,29}$$

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00046615

Digitale Bibliothek Braunschweig

und vermerken, daß wir $\boldsymbol{S}$ sowohl durch $\boldsymbol{F}$ als auch durch einen schiefsymmetrischen Spannungsfunktionentensor $\boldsymbol{U}$ ausdrücken können (Finzi [4]); $\boldsymbol{U}$ hat, wie aus seiner Definition (1,29) erkennbar, dieselben algebraischen Symmetrien wie $\boldsymbol{T}$, also ebensoviele algebraisch voneinander unabhängige Maßzahlen wie $\boldsymbol{F}$, nämlich sechs. Die Darstellung von $\boldsymbol{S}$ durch $\boldsymbol{U}$ gilt aber für beliebige Dimensionenanzahl n, sogar für $n = 2$, wo $\boldsymbol{U}$ nur eine Maßzahl (eben die Airysche Spannungsfunktion) hat. — In der Darstellung (1,29) von $\boldsymbol{S}$ durch $\boldsymbol{F}$ können wir uns noch vom e-Tensor freimachen. Da nämlich

$$\begin{aligned} e^{i\alpha\lambda}\, e^{k\beta\mu} = {} & (g^{ik} g^{\alpha\beta} - g^{\alpha k} g^{i\beta})\, g^{\lambda\mu} + \\ & + (g^{i\beta} g^{\alpha\mu} - g^{\alpha\beta} g^{i\mu})\, g^{\lambda k} + \\ & + (g^{i\mu} g^{\alpha k} - g^{\alpha\mu} g^{ik})\, g^{\lambda\beta} \end{aligned} \tag{1,30}$$

ist, entsteht aus (1,29):

$$S_{(ik)} = T_{(ik)} - \frac{1}{2} g_{ik}\, T \tag{1,31}$$

mit

$$T_{(ik)} = g^{\alpha\beta}\, T_{\alpha i, k\beta}\,, \quad T = g^{\lambda\mu}\, T_{\lambda\mu}\,. \tag{1,32}$$

$\boldsymbol{S}$ entspricht somit dem Einsteinschen Tensor, dem Energie-Impuls-Tensor der Allgemeinen Relativitätstheorie, dessen vektorielle Divergenz identisch verschwindet. Die Symmetrie von T_{ik} und damit die von $\boldsymbol{S}$ folgt aus der zyklischen Symmetrie von $\boldsymbol{T}$. $\boldsymbol{S}$ drückt sich also in folgender Weise durch $\boldsymbol{F}$ aus:

$$\boxed{\begin{aligned} S_{ik} = {} & \Delta_2 F_{(ik)} - \nabla_i \nabla^\alpha F_{(\alpha k)} - \nabla_k \nabla^\alpha F_{(\alpha i)} + \nabla_i \nabla_k F + \\ & + g_{ik}\, (\nabla^\alpha \nabla^\beta F_{(\alpha\beta)} - \Delta_2 F) \end{aligned}} \tag{1,33}$$

mit $F = g^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$; $\Delta_2 = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta$, der „zweite Beltramische Operator", ist das kovariante Analogon des Laplaceschen Operators.

In manchen Fällen ist es bequemer, statt $\boldsymbol{F}$ einen Spannungsfunktionentensor $\boldsymbol{\Phi}$ einzuführen durch

$$\Phi_{(ik)} = F_{(ik)} - \frac{1}{2}\, g_{ik}\, F\,; \tag{1,34}$$

es wird dann

$$\boxed{S_{ik} = \Delta_2\, \Phi_{(ik)} - \nabla_i \nabla^\alpha \Phi_{(\alpha k)} - \nabla_k \nabla^\alpha \Phi_{(\alpha i)} + g_{ik} \nabla^\alpha \nabla^\beta\, \Phi_{(\alpha\beta)}} \tag{1,35}$$

Diese Darstellung gilt wieder für alle Dimensionenzahlen, während (1,33) für $n = 1$ und $n = 2$ versagt.

2. Nullspannungsfunktionen und Verträglichkeitsbedingungen; geometrische und mechanische Deutung der Spannungsfunktionen

Zu einem vorgegebenen Gleichgewichtssystem von Spannungen können die zugehörigen Spannungsfunktionen durch Integration des Dgl.-Systems (1,28) gefunden werden. Dies Integrationsproblem wurde von Schaefer [5] mit einer Methode erledigt, welche Einstein zur Behandlung schwacher Gravitationsfelder entwickelt hatte. Wir beschränken uns auf einige Bemerkungen. Die sechs Gleichungen des zu (1,28) gehörenden homogenen Dgl.-Systems

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00046615

Digitale Bibliothek Braunschweig

$$\nabla_i \nabla_m \overset{0}{F}_{(kl)} + \nabla_k \nabla_l \overset{0}{F}_{(im)} - \nabla_i \nabla_e \overset{0}{F}_{(km)} - \nabla_k \nabla_m \overset{0}{F}_{(il)} = 0 \tag{2,1}$$

sind zwar algebraisch, aber nicht vollständig voneinander unabhängig, da sie durch die drei Gleichungen der Bianchischen Identität miteinander verknüpft sind; unter geeigneten Regularitätsannahmen sind drei von ihnen eine Folge der restlichen drei. Dieser Zusammenhang kann aber nicht kovariant formuliert werden (Bach [6]). Aus dem Bestehen dieses Zusammenhanges können wir jedoch den Schluß ziehen, daß die allgemeine Lösung von (2,1) drei willkürliche Funktionen enthalten wird; wir wollen diese Lösung bestimmen und gleichzeitig beweisen, daß es keine anderen Lösungen von (2,1) geben kann. Schreiben wir (2,1) vorübergehend:

$$\nabla_{[i} \overset{0}{\gamma}_{k]\,lm} = 0 \tag{2,2}$$

mit

$$\overset{0}{\gamma}_{klm} = \nabla_m \overset{0}{F}_{(kl)} - \nabla_k \overset{0}{F}_{(lm)} - \nabla_l \overset{0}{F}_{(km)}\,, \tag{2,3}$$

so ist (2,2) die Integrabilitätsbedingung für

$$\nabla_m \overset{0}{F}_{(kl)} - \nabla_l \overset{0}{F}_{(km)} = \nabla_k \, \omega_{[ml]} \tag{2,4}$$

wobei ω ein noch zu bestimmender schiefsymmetrischer Tensor ist. Vertauscht man in (2,4) k mit l und subtrahiert von (2,4), so findet man

$$\nabla_k (\overset{0}{F}_{(lm)} + \omega_{[lm]}) - \nabla_l (\overset{0}{F}_{(km)} + \omega_{[km]}) = 0, \tag{2,5}$$

und das ist wieder notwendig und hinreichend für

$$\overset{0}{F}_{(lm)} + \omega_{[lm]} = \nabla_l v_m\,. \tag{2,6}$$

Vertauscht man schließlich in (2,6) l mit m und addiert bzw. subtrahiert, so erhält man die allgemeine Lösung von (2,1):

$$\overset{0}{F}_{(lm)} = \frac{1}{2} (\nabla_l v_m + \nabla_m v_l) = \nabla_{(l} v_{m)}, \tag{2,7}$$

und ferner noch

$$\omega_{[lm]} = \frac{1}{2} (\nabla_l v_m - \nabla_m v_l) = \nabla_{[l} v_{m]}\,. \tag{2,8}$$

$\overset{0}{\boldsymbol{F}}$ ist der symmetrische Gradiententensor, ω die Rotation eines willkürlichen Vektorfeldes $\boldsymbol{v}$, das seinerseits drei willkürliche Funktionen enthält. $\overset{0}{\boldsymbol{F}}$ heißt der „Tensor der Nullspannungsfunktionen", da er, in (1,28) eingesetzt, keinen Beitrag zum Spannungsfeld liefert. Er kann beispielsweise dazu verwendet werden, drei der sechs Maßzahlen von $\boldsymbol{F}$ ohne Änderung des zugehörigen Spannungszustandes (und ohne Drehung des Koordinatensystems!) zu Null zu machen und damit zu den Ansätzen von Maxwell [7] oder Morera [8] zu kommen, oder auch etwa dazu, den Tensor $\boldsymbol{\Phi}$ (1,34) einer Divergenzbedingung zu unterwerfen und damit die eingangs erwähnte Integrationsaufgabe zu erleichtern (Schaefer a. a. O.).

Ein Blick auf (2,7) und (1,9) zeigt, daß jedes kinematisch mögliche Verzerrungsfeld ein Feld von Nullspannungsfunktionen ist und umgekehrt (Weber [9]). Die Gleichungen (2,1) sind demzufolge nichts anderes als die

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00046615

Digitale Bibliothek Braunschweig

bekannten „Verträglichkeitsbedingungen", die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Gleichungen (1,9), als Differentialgleichungen für den Verschiebungsvektor aufgefaßt, integrabel sind. Daß die Bedingungen (2,1) notwendig sind, kann man auch geometrisch einsehen. Denken wir uns nämlich den Maßtensor g_{ik} des Euklidischen Raumes infinitesimal abgeändert in

$$\bar{g}_{ik} = g_{ik} + 2\,F_{(ik)}\,\delta t \tag{2,9}$$

(δt eine infinitesimale Konstante, deren höhere Potenzen vernachlässigt werden), und berechnen wir uns den zu $\bar{g}_{ik}$ gehörenden Krümmungstensor, so finden wir, daß dieser, bis auf den Faktor δt, gerade gleich $\boldsymbol{T}$ ist (1,28). Die F_{ik} erzeugen also als „Spannungspotentiale"*) eine Raumverkrümmung, als die wir den Spannungszustand bereits gedeutet hatten. Wenn die F_{ik} zwar die Maßbestimmung, nicht aber die Euklidizität des Raumes ändern, wird $\boldsymbol{T}$ Null (und umgekehrt). Das tritt sicher dann ein, wenn die Änderung der Maßbestimmung durch eine infinitesimale Verzerrung des Kontinuums zustande kommt.

Vom Standpunkt der Systemmechanik aus liegt eine andere Deutung der Spannungsfunktionen näher: Wir schreiben die Verträglichkeitsbedingungen für $\delta\varepsilon$ gemäß (1,33) in der symmetrischen Form

$$\begin{aligned} \Delta_2(\delta\varepsilon_{ik}) - \nabla_i\nabla^\alpha(\delta\varepsilon_{\alpha k}) - \nabla_k\nabla^\alpha(\delta\varepsilon_{\alpha i}) + \nabla_i\nabla_k(\delta\varepsilon) + \\ + g_{ik}\left[\nabla^\alpha\nabla^\beta(\delta\varepsilon_{\alpha\beta}) - \Delta_2(\delta\varepsilon)\right] = 0 \end{aligned} \tag{2,10}$$

(die linke Seite von (2,10) ist übrigens ein selbstadjungierter Differentialausdruck!). Dann können wir den Ansatz (1,8) der Kontinuumsmechanik auch in folgender Weise formulieren (der Einfachheit halber lassen wir dabei die hier nicht interessierenden Oberflächenkräfte weg und bringen auch durch geeignete Annahmen über den Verzerrungszustand alle im folgenden auftretenden Randintegrale zum Verschwinden):

$$\iiint\limits_{(V)} \left\{S^{\alpha\beta}\,\delta\varepsilon_{\alpha\beta} - F^{\alpha\beta}\left[\Delta_2(\delta\varepsilon_{\alpha\beta}) - \ldots\right]\right\} dV = 0, \tag{2,11}$$

$F^{\alpha\beta}$ ein symmetrischer „Lagrangescher Tensor", mit welchem multipliziert (2,10) als Nebenbedingung zu (1,8) hinzugefügt wird; damit ist (1,9) abgegolten. Durch zweimalige partielle Integration erhält man unmittelbar (1,33), wenn man beachtet, daß die $\delta\varepsilon$ jetzt willkürlich sind. Der Lagrangesche Tensor $\boldsymbol{F}$ ist also der Tensor der Spannungsfunktionen und erscheint hier als System der Reaktionen auf die Euklidizitätsbedingung (2,10), also darauf, daß es dem Kontinuum bei einer infinitesimalen Verzerrung verboten ist, aus dem Euklidischen Raum herauszutreten. Man kann noch weiter gehen und auch noch die für die Verträglichkeitsbedingungen gültige Bianchische Identität als Nebenbedingung zu (2,10) hinzufügen; der zugehörige Lagrangesche Tensor erweist sich als der Tensor $\overset{0}{\boldsymbol{F}}$ der Nullspannungsfunktionen. Das soll hier nicht weiter ausgeführt werden. Auch verzichten wir darauf, eine analoge Herleitung des schiefsymmetrischen Tensors $\boldsymbol{U}$ der Spannungsfunktionen (1, 29) mit Hilfe der Verträglichkeitsbedingungen (2,1) zu geben, da sich hierbei keine neuen Gesichtspunkte ergeben.

*) Sie entsprechen den „Schwerepotentialen" der Relativitätstheorie.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00046615

Digitale Bibliothek Braunschweig

Wir kehren noch einmal zur nichteuklidischen Deutung des Spannungsfeldes zurück. Durch die infinitesimale Transformation (2,9) wird der Euklidische Raum zum nichteuklidischen Spannungsraum, dessen Einsteinscher Tensor (1,33) $\boldsymbol{S}$ ist. Die Projektion des Kraftvektors $d\,\boldsymbol{K}$ auf den Normalenvektor des zugehörigen Oberflächenelements $d\,f$ ist

$$d\,K^{\alpha}\,n_{\alpha} = S^{\alpha\beta}\,n_{\alpha}\,n_{\beta}\,d\,f. \tag{2,12}$$

Die Größe $S^{\alpha\beta}\,n_{\alpha}\,n_{\beta}$ ist nun nach Herglotz [10] die Gaußische Krümmung derjenigen geodätischen Fläche, die im Spannungsraum auf dem Normalenvektor senkrecht steht, an der Kraftangriffsstelle. Allgemein gilt für $n \geqq 3$: Die Normalspannung an der Stelle P ist gleich der Summe der Gaußischen Krümmungen derjenigen $\binom{n-1}{2}$ geodätischen Flächen, die im Spannungsraum auf dem Normalenvektor in P senkrecht stehen, an der Stelle P. Dieser merkwürdige Satz ist die Verallgemeinerung eines Satzes, der für ebene Spannungszustände gilt: Denkt man sich die Begrenzungskurve eines ebenen Kontinuums senkrecht zu dieser Ebene auf die (infinitesimale) Airysche Spannungsfläche projiziert, so ist in jedem Punkt der Begrenzungskurve die Normalspannung gleich der Normalkrümmung der projizierten Kurve im entsprechenden Punkt. Es verlohnt sich, den Fall $n = 2$ etwas näher zu betrachten, da hier besondere Verhältnisse vorliegen. Wie bekannt, ist der Einsteinsche Tensor in zwei Dimensionen identisch Null, also für eine Darstellung des Spannungstensors unbrauchbar. An seine Stelle tritt der „zweite Fundamentaltensor" $\boldsymbol{h}$ der infinitesimalen Airyschen Spannungsfläche, der als Baustein des Krümmungstensors die Krümmungseigenschaften der Fläche charakterisiert. Ist die Spannungsfläche durch

$$x^{(3)} = \Phi\,(x^{(1)}, x^{(2)}) \cdot \delta\,t \tag{2,13}$$

gegeben (Φ ist die Airysche Spannungsfunktion), so ist bis auf Größen höherer Ordnung

$$h_{ik} = \nabla_i\,\nabla_k\,\Phi \cdot \delta\,t \tag{2,14}$$

und

$$S_{ik} = -\,h_{ik} + g_{ik}\,h \tag{2,15}$$

mit $h = g^{\alpha\beta}\,h_{\alpha\beta}$. Somit wird die Normalspannung:

$$S_{\alpha\beta}\,n^{\alpha}\,n^{\beta} = -\,h_{\alpha\beta}\,n^{\alpha}\,n^{\beta} + h. \tag{2,16}$$

Der Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ entsteht aus dem Tangentenvektor $\boldsymbol{t}$ an die Begrenzungskurve durch eine Drehung um 90^0:

$$n^{\alpha} = e^{\alpha\lambda}\,t_{\lambda}, \tag{2,17}$$

$e^{ik} = e^{[ik]}$ ist der analog zu (1,10), (1,11) gebildete zweidimensionale e-Tensor. Setzt man dies in (2,16) ein und beachtet, daß

$$e^{\alpha\lambda}\,e^{\beta\mu} = g^{\alpha\beta}\,g^{\lambda\mu} - g^{\alpha\lambda}\,g^{\beta\mu} \tag{2,18}$$

ist, so folgt für die Normalspannung:

$$S_{\alpha\beta}\,n^{\alpha}\,n^{\beta} = h_{\alpha\beta}\,t^{\alpha}\,t^{\beta}, \tag{2,19}$$

bekanntlich die Normalkrümmung der durch $\boldsymbol{t}$ gegebenen Flächenkurve.

Einige andere Erweiterungen der für $n = 2$ vorliegenden Verhältnisse behandeln wir im 3. Abschnitt.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00046615

Digitale Bibliothek Braunschweig

Wir schließen mit einer neuen Herleitung der „Plückerschen Analogie", eines Dualitätsprinzips, das in der Dynamik häufig benutzt wird.

Es sei ein Flächenelement $d\,f$ und der dort herrschende Spannungszustand gegeben. Damit sind dort auch die Kraft $d\,\boldsymbol{K}$ und das Moment $d\,\boldsymbol{M}$ dieser Kraft gegeben — das Moment durch

$$d\,M_i = e_{i\alpha\beta}\, r^\alpha\, d\,K^\beta = r^\alpha\, d\,K_{i\alpha}\,; \tag{2,20}$$

$\boldsymbol{r}$ ist der Ortsvektor vom Momentenbezugspunkt nach $d\,f$ hin. Man denke sich nun $\boldsymbol{r}$ parallel in einen Randpunkt von $d\,f$ verschoben; das ist eine im Euklidischen Raum eindeutige Operation. Danach werde dem Raum gemäß (2,9) die nichteuklidische Maßbestimmung des Spannungsraumes aufgeprägt; der Krümmungstensor ist $\boldsymbol{T}$. Im Sinne dieser neuen Maßbestimmung wird nun $\boldsymbol{r}$ längs der Begrenzungskurve von $d\,f$ parallel verschoben; seine Änderung nach einmaligem Umlauf ist

$$\Delta\, r_i = T_{\alpha\beta,\,i\lambda}\, r^\lambda\, d\,f^{\alpha\beta\,1)}. \tag{2,21}$$

Da die Parallelverschiebung die Länge eines Vektors nicht ändert, muß $\boldsymbol{r} + \Delta\,\boldsymbol{r}$ durch eine Drehung aus $\boldsymbol{r}$ hervorgehen, deren Drehtensor $\Delta\,\boldsymbol{\omega}$ sei:

$$\Delta\, r_i = \Delta\,\omega_{i\varrho}\, r^\varrho. \tag{2,22}$$

Auf (1,14) und (2,20) zurückgreifend entnehmen wir aus (2,22), daß

$$d\,K_{lm} = \Delta\,\omega_{lm},\quad d\,M_i = \Delta\, r_i \tag{2,23}$$

ist: bei der oben beschriebenen „Umkreisungsverrückung"[2]) erleidet der Ortsvektor im Spannungsraum eine Drehung, und die „Winkelgeschwindigkeit" der Drehung wird durch den schiefsymmetrischen Krafttensor, die Änderungsgeschwindigkeit selbst durch den Momentenvektor gemessen.

3. Integration der Oberflächenkräfte und ihrer Momente Spezielle räumliche Spannungsfunktionen

Das Spannungsfeld ist quellenfrei, also ein (tensorielles) Wirbelfeld. Es gelingt daher leicht, die an einem endlichen Stück der Oberfläche angreifenden Kräfte und ihre Momente durch Linienintegrale („Zirkulationen") darzustellen, welche über die Randkurve des Oberflächenstücks zu nehmen sind. Der Fall liegt ähnlich wie beim ebenen Spannungszustand: dort sind die Resultierenden der längs eines Schnittes $A\,B$ angreifenden Kräfte und ihr resultierendes Moment „Punktepaarfunktionen", die nur von der Lage der Punkte A und B, nicht aber vom Verlauf der Schnittkurve abhängen — von Komplikationen abgesehen, die bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen auftreten können. Betrachten wir also programmgemäß ein von einer geschlossenen, orientierten Flächenkurve C abgegrenztes, einfach zusammenhängendes Flächenstück 0_1; die Orientierung der Flächenkurve geht aus Abb. 3 hervor. Entsprechend (2,2), (2,3) setzen wir an:

$$T_{ik,\,lm} = 2\,\nabla_{[i}\,\gamma_{k]\,lm} \tag{3,1}$$

mit

$$\gamma_{klm} = \nabla_m F_{(kl)} - \nabla_k F_{(lm)} - \nabla_l F_{(km)}\,; \tag{3,2}$$

[1]) Diese „Umlaufformel" wird häufig zur Definition des Krümmungstensors herangezogen.

[2]) Cartan [11].

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00046615

Digitale Bibliothek Braunschweig

γ ist übrigens, bis aufs Vorzeichen, die Änderung der Christoffelschen Dreiindizessymbole, die aus der Änderung (2,9) des Maßtensors entspringt. Wir führen jetzt die festen Einheitsvektoren $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ eines cartesischen Koordinatensystems ein, für welche die kovariante Ableitung ihrer Maßzahlen in jedem

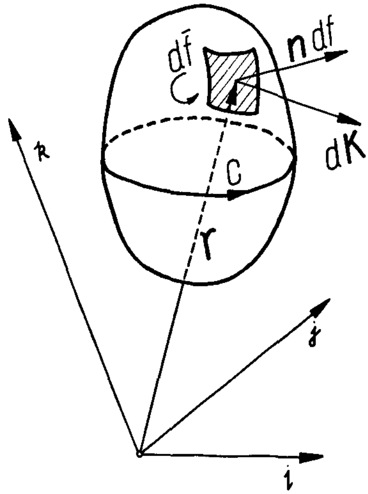

Abb. 3

Koordinatensystem verschwindet. Die Projektionen des Kraftvektors auf diese Einheitsvektoren:

$$d\,K_x = d\,K^\lambda i_\lambda \quad \text{usw.} \tag{3,3}$$

sind die orthogonalen Maßzahlen des Kraftvektors im $(x\;y\;z)$-System.

Es wird dann

$$\begin{aligned} d\,K_x &= \frac{1}{2} e^{\lambda\varrho\sigma}\, i_\lambda\, d\,K_{\varrho\sigma} = \frac{1}{2} e^{\lambda\varrho\sigma}\, i_\lambda\, T_{\alpha\beta,\,\varrho\sigma}\, d\,f^{\alpha\beta} = \\ &= e^{\lambda\varrho\sigma} i_\lambda \nabla_{[\alpha}\, \gamma_{\beta]\varrho\sigma}\, d\,f^{\alpha\beta} = \nabla_{[\alpha}\, (\gamma_{\beta]\varrho\sigma}\, e^{\lambda\varrho\sigma}\, i_\lambda)\, d\,f^{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{3,4}$$

ein „totales Oberflächendifferential", und daher verwandelt sich nach dem Stokeschen Satz die x-Kompenente der über 0_1 genommenen Kräftesumme

$$K_x = \iint_{0_1} \mathrm{d}\,K_x$$

in das Linienintegral

$$K_x = \frac{1}{2} \oint_C \gamma_{\alpha\varrho\sigma}\, e^{\lambda\varrho\sigma}\, i_\lambda\, dx^\alpha, \tag{3,5}$$

entsprechend für die Maßzahlen K_y und K_z. Setzt man (3,2) in (3,5) ein, so ergibt sich:

$$\boxed{K_x = \oint_C \nabla_\varrho\, F_{(\sigma\alpha)}\, e^{\lambda\varrho\sigma}\, i_\lambda\, d\,x^\alpha}\,. \tag{3,6}$$

Das Moment der in 0_1 angreifenden Kräfte, bezogen auf den Ursprung des cartesischen Koordinatensystems, wird nach (2,18) berechnet. Wir übergehen

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00046615

Digitale Bibliothek Braunschweig

die Zwischenrechnung und geben gleich das fertige Linienintegral für die x-Komponente des resultierenden Momentes an:

$$M_x = \oint_C r^\lambda \gamma_{\lambda\alpha\beta}\, i^\beta\, d\, x^\alpha \tag{3,7}$$

oder auch

$$\boxed{M_x = \oint_C [-F_{(\alpha\beta)} + 2\, r^\lambda\, \nabla_{[\lambda} F_{(\alpha]\beta)}\, i^\alpha]\, d\, x^\beta}\,. \tag{3,8}$$

(3,6) und (3,8) lassen eine deutliche Analogie erkennen zu den Formeln des ebenen Spannungszustandes:

$$\begin{gathered} K_x = [\nabla_\alpha \Phi \cdot e^{\alpha\lambda}\, i_\lambda]_A^B\,, \quad K_y = [\nabla_\alpha \Phi \cdot e^{\alpha\lambda}\, j_\lambda]_A^B\,, \\ M = [-\Phi + r^\lambda \nabla_\lambda \Phi]_A^B\,, \end{gathered} \tag{3,9}$$

aus denen die Resultierende und das resultierende Moment der längs des Schnittes AB angreifenden Kräfte berechnet werden können (Φ ist wieder die Airysche Spannungsfunktion). Im übrigen rechnet man leicht nach, daß die Integranden von (3,6) und (3,8) totale Differentiale werden, wenn man für $\boldsymbol{F}$ den Tensor $\overset{0}{\boldsymbol{F}}$ der Nullspannungsfunktionen einsetzt, so daß die Linienintegrale verschwinden, wie es sein muß. Umgekehrt ist das Verschwinden von K_x, K_y und K_z für jede beliebige geschlossene Oberflächenkurve notwendig dafür, daß $\boldsymbol{F} = \overset{0}{\boldsymbol{F}}$ ist.

Zum Abschluß unserer Untersuchungen noch zwei Sonderfälle des räumlichen Spannungszustandes, die bereits von Maxwell und später in einer Monographie von Klein-Wieghardt [12] untersucht worden sind. Es sind dies solche räumlichen Spannungszustände, die nur von einer Spannungsfunktion Φ abhängen, für die nämlich

$$\text{(a)}\quad F_{ik} = g_{ik} \cdot \Phi \quad \text{bzw.} \quad \text{(b)}\quad F_{ik} = \frac{1}{2} \nabla_i \Phi \cdot \nabla_k \Phi \tag{3,10}$$

ist. Die geometrische Bedeutung dieser Ansätze ist an Hand von (2,9) leicht zu erkennen:

Für den Ansatz (3,10a) wird der Maßtensor des Spannungsraumes

$$\bar{g}_{ik} = g_{ik} \cdot [1 + 2\,\Phi \cdot \delta\, t] = u\,(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) \cdot g_{ik}\,. \tag{3,11}$$

Der Spannungsraum kann also konform auf den Euklidischen Raum abgebildet werden, ist also „konformeuklidisch“.

Der Ansatz (3,10b) hingegen ergibt für das Bogenelement des Spannungsraumes:

$$d\,\bar{s}^2 = g_{\alpha\beta}\, d\, x^\alpha\, d\, x^\beta + (d\,\Phi \cdot \sqrt{\delta\, t})^2\,; \tag{3,12}$$

der Spannungsraum ist daher eine Hyperfläche

$$x^{(4)} = \Phi\,(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) \cdot \sqrt{\delta\, t} \tag{3,13}$$

des vierdimensionalen Euklidischen Raumes, also von der „Klasse eins“. Also sind die beiden Fälle (3,10) die natürlichen Verallgemeinerungen des ebenen Falls: jede Airysche Spannungsfläche $x^{(3)} = \Phi\,(x^{(1)}, x^{(2)})$ ist nämlich (a) konform auf die Euklidische Ebene abbildbar (also konformeuklidisch), und kann (b) im dreidimensionalen Euklidischen Raum untergebracht werden (ist also von der Klasse eins).

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00046615

Digitale Bibliothek Braunschweig

Zusammenfassung

Der Gleichgewichtszustand kontinuierlicher räumlicher Kräftesysteme kann durch die Einführung eines Spannungsfunktionentensors geometrisiert und dadurch einer anschaulichen Deutung zugänglich gemacht werden. Es ergeben sich aufschlußreiche Beziehungen zu den Gedankengängen der Relativitätstheorie und zu besonderen Fragestellungen der Differentialgeometrie.

Literatur

[1] G. Piola, Modena Mem. *24*, I (1848).
[2] G. Hamel, Theoretische Mechanik. Berlin/Göttingen/Heidelberg (1949).
[3] T. Levi-Civita, Der absolute Differentialkalkül. Berlin (1928).
[4] B. Finzi, Integrazione delle equazione indefinite della meccanica dei sistemi continui. Rend. Linc. XIX (1934).
[5] H. Schaefer, Die Spannungsfunktionen des räumlichen Kontinuums und des elastischen Körpers. ZAMM 33, 10/11 (1953).
[6] R. Bach, Zur Weylschen Relativitätstheorie. Math. Ztschr. 9 (1921).
[7] C. Maxwell, Scientific papers II. Transact. Roy. Edinb. Bd. 26 (1772). Transact. Roy. Soc. Edinb. Bd. 26 (1927).
[8] G. Morera, Acc. Linc. Rend. V, 1 (1892).
[9] C. Weber, Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums. ZAMM Bd. 28 (1948).
[10] G. Herglotz, Zur Einsteinschen Gravitationstheorie. Sitzungsber. sächs. Ges. Wiss. Leipzig (1916).
[11] E. Cartan, La Géometrie des Espaces de Riemann. Paris (1885).
[12] F. Klein und K. Wieghardt, Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme mit besonderer Berücksichtigung der Maxwellschen Arbeiten. Arch. Math. Phys. III/VIII (1904).

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00046615